Die Rolle des Satzes von Perron-Frobenius in Leontief und Sraffa Modellen

Jean-François Emmenegger, Daniel Chable,
e-mail: jean-francois.emmenegger@unifr.ch

Input-Output Workshop Spezial, Universität Osnabrück, 30.-31.3.2017

Oscar Perron (1880-1975) bewies den Satz ([3], 1907), dass eine reelle, positive $(n \times n)$ $\mathbf{A}$ Matrix genau einen reellen, positiven, maximalen Eigenwert $\lambda_A > 0$ besitzt, dem bis auf Vielfachheit ein positiver Eigenvektor $\mathbf{x}_A > \mathbf{o}$ zugeordnet ist.

Ferdinand Georg Frobenius (1849-1917) verallgemeinerte den Satz von Perron in den Sinne, dass er zeigte ([2], 1912), dass eine reelle, *nicht negative* und *irreduzible* $(n \times n)$ $\mathbf{A}$ Matrix genau einen reellen, positiven, maximalen Eigenwert λ_A besitzt, wobei weitere komplexe Eigenwerte vom Betrage λ_A existieren können, welche alle auf einem Kreis vom Radius λ_A der komplexen Ebene $\mathbb{C}$ liegen. Genau einer davon kommt auf die reelle Achse zu stehen, welcher als *Frobeniuszahl* λ_A bezeichnet wird. Der Frobeniuszahl ist ein positiver Eigenvektor $\mathbf{x}_A > \mathbf{o}$ zugeordnet, und zwar bis auf Vielfachheit. In der deutschsprachigen mathematischen Literatur wird diese erweiterte Version als *Satz von Perron-Frobenius* bezeichnet.

Geometrisch gesprochen erzeugt die Frobeniuszahl λ_A mit dem als Richtungsvektor ausgewählten Eigenvektor $\mathbf{x}_A$ die Gerade $g(\mathbf{x}_A, \lambda_A)$, die den Ursprung des $n-$dimensionalen Vektorraumes $\mathbb{R}^n$ enthält. In diesem Sinne sind λ_A und $g(\mathbf{x}_A, \lambda_A)$ einander eineindeutig zugeordnet, $\lambda_A \Leftrightarrow g(\mathbf{x}_A, \lambda_A)$.

Man geht erstens von einer reellen, *nicht negativen* $(n \times n)$ *Input-Output* Matrix $\mathbf{Z} = (z_{ij}) \geqq \mathbf{0}$, $i, j \in \{1, ..., n\}$ aus, deren Elemente *monetäre Grössen* bedeuten, wobei i eine Ware und j einen Produktionssektor bezeichnet. Man betrachtet den Summenvektor[1] $\mathbf{e} = [1, .., 1]'$, den Vektor der Endnachfrage $\mathbf{f}$ und man definiert $\mathbf{x} = \mathbf{Ze} + \mathbf{f} > \mathbf{o}$ als Vektor der Gesamtausgaben aller Produktionssektoren. Es sei ferner $\hat{\mathbf{x}}$, jene aus dem positiven Vektor $\mathbf{x}$ erzeugte Diagonalmatrix, so dass man die *Input-Output Koeffizienten Matrix* $\mathbf{A} = \mathbf{Z}\hat{\mathbf{x}}^{-1}$ erzeugen kann, deren Elemente dimensionslos sind.

Ausgehend von der nun bekannten *nicht negativen* Matrix $\mathbf{A}$ mit Frobeniuszahl λ_A definiert Aschmanov ([1], p. 39) für Vektoren $\mathbf{f}$ der Endnachfrage das *Leontief Modell*

$$\mathbf{x} = \mathbf{Ax} + \mathbf{f} \geqq \mathbf{0}. \tag{1}$$

Fordert man zusätzlich für den Vektor der Endnachfrage $\mathbf{f} \geqq \mathbf{o}$, so liegt ein *produktives Leontief Modell* vor. In Aschmanov ([1], Theorem 1.5, p. 39) steht der

Satz: Ein *Leontief Modell* ist dann und nur dann *produktiv*, wenn $\lambda_A < 1$ ist.

Setzt man voraus, dass die *Leontief Inverse* $(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}$ existiert, so beschreibt die Gleichung $\mathbf{x} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{f}$ das bekannte *Input-Output Mengenmodell* von Wassily Leontief (1906-1999).

[1] Das Zeichen Apostroph ($'$) ist der Transpositionsoperator.

Man geht zweitens von einer reellen, *nicht negativen* und *irreduziblen* $(n \times n)$ *Input-Output* Matrix $\mathbf{S} \geqq \mathbf{0}$ aus, deren Elemente *physische Einheiten* bedeuten. Die dadurch beschriebene Ökonomie besteht aus lauter Basisprodukten ([5], Par. 6). Man hat den Überschussvektor $\mathbf{d} \geqq \mathbf{0}$ und den Vektor $\mathbf{L} = [L_1, ..., L_n]' \geqq \mathbf{o}$ der je Sektor $j \in \{1, ..., n\}$ notwendigen total Arbeitszeiten L_j. Man definiert $\mathbf{q} = \mathbf{Se} + \mathbf{d} > \mathbf{0}$ als Vektor des gesamten Outputs aller Sektoren. Es ergibt sich das *Produktionsschema* $(\mathbf{S}', \mathbf{L}) \Rightarrow (\hat{\mathbf{q}})$ von Piero Sraffa (1898-1983). Man bekommt ferner die nicht negative und irreduzible *Input-Output Koeffizienten Matrix* $\mathbf{C} = \mathbf{S}\hat{\mathbf{q}}^{-1}$ in *physischen Einheiten*. Falls $\mathbf{d} = \mathbf{o}$ ist, so ist die Frobeniuszahl $\lambda_C = 1$. Falls $\mathbf{d} \geqq \mathbf{o}$ und $\mathbf{d} \neq \mathbf{o}$ ist, so liegt die Frobeniuszahl im Intervall $]0, 1[$, $0 < \lambda_C < 1$, und man definiert das *Standardverhältnis* $R = (1/\lambda_C) - 1 > 0$.

Man kann dann eine *Profitrate* $r \in [0, R]$ wählen, sowie eine *Lohnrate* $w > 0$ die von r i. a. nicht unabhängig ist. Damit hat man das *vollständige Sraffa Preismodell*

$$\mathbf{S}'\mathbf{p}(1 + r) + \mathbf{L} \cdot w = \hat{\mathbf{q}}\mathbf{p} \Leftrightarrow \mathbf{C}'\mathbf{p}(1 + r) + (\hat{\mathbf{q}}^{-1}\mathbf{L}) \cdot w = \mathbf{p}. \tag{2}$$

Man unterscheidet folgende vier Fälle. a) Es hat keinen Überschuss: $r = w = 0$. b) Es hat Überschuss aber keinen Lohn: $r = R > 0$, $w = 0$. c) Es hat Überschuss aber keinen Profit: $w > 0$, $r = 0$. c) Es hat Überschuss, aufgeteilt in Lohn und Profit: $R > r > 0$, $w > 0$. In allen vier Fällen ist der Preisvektor des *vollständigen Sraffa Preismodelles* (2) immer positiv, $\mathbf{p} > \mathbf{0}$.

Ist schliesslich die Matrix $\mathbf{S}$ *nicht negativ* und *reduzibel*, eine Eigenschaft, die sich auf Matrix $\mathbf{C} = \mathbf{S}\hat{\mathbf{q}}^{-1}$ überträgt, so enthält die beschriebene Ökonomie Basis- und Nicht-Basisprodukte. Um positive Preisvektoren $\mathbf{p}$ des zugehörigen *vollständigen Sraffa Preismodelles* (2) zu garantieren, müssen die Matrizen und Vektoren zusätzliche ökonomische Bedingungen erfüllen, siehe Schefold ([4], p. 49) und Sraffa ([5], 6. Anhang: p. 216−225). Diese sind von den mathematischen Voraussetzungen der Sätze von Perron-Frobenius stets zu unterscheiden.

Literatur

[1] Ashmanov, S. A., in russischer Sprache, *Einführung in Mathematische Oekonomie*, - Moscow-Nauka, 296 Seiten, (1984).

[2] Frobenius, G., *Über Matrizen aus nicht negativen Elementen*, Berliner Bericht, Seiten 456-477, (1912).

[3] Perron, O., *Zur Theorie der Matrices*, Mathematische Annalen, Vol. 64, Seiten 248-263, (1907).

[4] Schefold, B., *Mr Sraffa on Joint Production and Other Essays*, Unwin Hyman, London, (1989).

[5] Sraffa, P., *Warenproduktion mittels Waren*, Edition Suhrkamp 780, Erste Auflage, (1976).